



TITLE:

チャールズ・バベッジの表記法 ("Notation") について(数学史の研究)

AUTHOR(S):

野村, 恒彦

CITATION:

野村, 恒彦. チャールズ・バベッジの表記法("Notation") について(数学史の研究). 数理解析研究所講究録 2007, 1546: 55-64

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80781>

RIGHT:

チャールズ・バベッジの表記法 ("Notation") について

神戸大学大学院総合人間科学研究科 野村恒彦 (Tsunehiko Nomura)
Graduate School of Cultural Studies and Human Science
Kobe University

はじめに

チャールズ・バベッジ (Charles Babbage) は、ケンブリッジ大学時代に大陸の数学 (解析学) を大学に導入することを目的として、解析協会 (Analytical Society) を組織したことからもわかるように、数学の分野においても大きな業績を残している。ニュートンによる表記法 (Dot-ism) を大陸の表記法 (D-ism) に改めようとしたことも、解析協会の活動の大きな目的の一つであった。従って、バベッジは表記法に大きな関心を持っていたものと考えることができる。

本論文ではバベッジが執筆した "Notation" をもとに、彼自身が目指していた表記法 (Notation) はどのようなものであったかを明らかにしたいと考えている。

本論文に関して非常に重要な先行研究としては、ダビーの *The Mathematical Work of Charles Babbage* (参考文献 [4]) とカジヨリの *A History of Mathematical Notations* (参考文献 [5]) がある。

1 バベッジの記号法 (Notation) に関する著作

バベッジの記号法 (Notation) に関する論文は以下の 3 編が知られている*1。

1. "Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 1, 1822, pp.63-76
2. "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.2, 1827, pp.325-77
3. "Notation", *The Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, pp.394-9

最後の "Notation" は本論文で中心に扱うものであるもので、詳細については後述するものとする。それ以外 2 編について、ここで簡単にコメントを付けておくことにしたい。

まず 1 の論文についてであるが、この中でバベッジは自身が考案した主題 (関数の微積分学 (the calculus of functions)) について述べる際に、そこで使われている記号の適切さを述べただけでなく、その記号の体系の簡潔さを証明するために実際の計算も行っている。そして、それは新しい数学の一部門である「記号の微積分学 (calculus of notations)」として記述されるであろうと讃辞が送られている*2。

バベッジが考案した関数を扱った部門は関数方程式であるが、この論文ではその追求がなされている。それは関数のいろいろな形の表現法である。例えば一変数の関数 f が与えられているとすれば、 $ff(x)$ は $f^2(x)$ と記述することができる*3。バベッジは、また 2 変数の関数についても $\psi\{\psi(x, y), \psi(x, y)\}$ や $\psi^{2,2}(x, y)$ の表記を使用するなどして議論を展開している。

そして 2 の論文についてであるが、これについては関数の微積分学とポリスマタについて書かれたものが入

*1 J. M. Dubbey, *The Mathematical Work of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.154

*2 *Ibid.*, p.155

*3 ここでの $ff(x)$ もしくは $f^2(x)$ は現在の表記では $f(f(x))$ になることに注意をしておく必要がある。

り交じり論点が曖昧であるとして、1 に比して低い評価がなされている*4。

2 “Notation” について

2. 1 成立

“Notation” は、『エジンバラ百科事典』(*Edinburgh Encyclopaedia*) の一項目として、執筆された*5。この事典が出版されたのは 1830 年であるが、バベッジが“Notation”の項目の執筆を終えたのは、おそらく 1822 年 2 月のことだろうとの指摘がある。というのはこの時期にバベッジは、事典の編集者であるブリュースターと項目執筆についての手紙のやりとりがあり、それらによって確認することができるからである*6。

このバベッジの“Notation”は英国に大陸からの解析学が導入された時期に執筆されたものであり、非常に意義があるものである。また全体を通じて言えることであるが、バベッジの記述には大陸における記号法が使用され、英国伝統の流率法による記号は全く使用されていないことにも留意する必要がある。

なお、バベッジはこの『エジンバラ百科事典』に“Porisms”と題する項目も寄稿している*7。

2. 2 内容

“Notation”でバベッジはまず表記法について、「表記法(数学においての)とは、任意の記号(symbol)を量表現することや、その量に対して行われる演算について適合させる技術」と定義している。そして、まず表記法の歴史が簡単に述べられた後、表記法について守るべきルールとしてバベッジは 11 項目を示している。このルールはバベッジ自身が考えていたことを表現したものであり、バベッジが表記法の歴史の中から注意すべき点を抽出してルール化したものと考えられ非常に重要である。また、表記法の歴史について述べられる中で、ニュートンとライブニッツの表記法とが比較されている箇所があり注目に値する。そしてそこでは、大陸の解析学を英国に導入するために解析協会の設立や活動に大きな役割を果たしたバベッジの意見が、前述したとおり強く反映されている。

内容を詳述するにあたっては、バベッジの著作集第 1 巻*8 に収録されているものを基本として、『エジンバラ百科事典』の復刻版*9 に収録されているものを参照した。バベッジの著作集に収録された“Notation”については、『エジンバラ百科事典』での大きな誤りは訂正したとの編者による注が付けられている。本論文では、バベッジの記述について著作集と百科事典の復刻版との相違についてもできるだけ述べるように注意を払った。

2. 2. 1 表記法について

バベッジは本論文の中で数学における表記法(Mathematical Notation)の歴史について簡単にまとめている。そこで、バベッジは著名な記号法について解説を行っている。以下バベッジによる記述をまとめる*10。

バベッジはまず、ディオパントスについて述べることから始めている。ディオパントス(Diophantus)は、

*4 Dubby, *op. cit.*, p.162

*5 Ch. Babbage, “Notation”, *The Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, pp.394-9

*6 Dubbey, *op. cit.*, pp.166-7

*7 Ch. Babbage, “Porisms”, *The Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.17, 1830, pp.106-14

*8 Ch. Babbage, *Works of Charles Babbage* Vol.1 (London: William Pickering, 1989), pp.409-24

*9 Conducted by David Brewster, *Edinburgh Encyclopaedia* (London: Routledge, 1999), Vol.15, pp.394-9

*10 人名の日本語表記はカッツ、『数学の歴史』, 上野健爾・三浦伸夫監訳, 共立出版, 2005 で用いられているものを使い、英語表記のものはカジョリ, F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* Vol.1 (Chicago: Open Court Pub., 1928) を参照した。

未知数を $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ と呼び、繰り返しを避けるために末尾の文字 ς を使用したとする。また、プラスについては記号を使用するのではなく、その意味する言葉を使用していたと述べる一方、マイナスについては ψ を転倒させたものを使用していると述べている。それはギリシャ語の $\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$ (未知のものの意) から派生したものであるとしている。

次にルカ・パチョーリ (Lucas Pacioli) ^{*11} についての記述があり、彼はプラスの意味として p 、マイナスの意味として m を使ったと説明を行っている。そして、彼の後継者も同じ様な記号の用い方をしていると指摘する。

ドイツ人であるシュティーフェル (Stifelius) ^{*12} はその著書の中で記号をかなり頻繁に使用しており、ハットンによれば、+ や - の記号とともに根号として $\sqrt{\quad}$ を初めて使ったとされている。また、シュティーフェルは変数を扱うにあたって A, B, C といった文字を使用したと言及する。

レコード (Recordes) は初めて等号を導入したと紹介し、また量を結合するという意味で $\overline{a+b}$ のような記号を使用したとする。その後、ジラルール (Girarde) ^{*13} は、 $(a+b)$ のような括弧を使用したとしている。

ボンベリ (Bombelli) は、指数を表す方法として $\underline{\quad}$ のように、指数の文字の頭文字を付加するかわりに、数字の下に \sim を付けることとしたことを述べ、シモン・ステヴィン (Simon Stevin) は、ボンベリと非常に似た考え方により、指数を \bigcirc で囲まれた数字で表したことを指摘した。また、付けられた指数がゼロの場合にはその数が 1 になることを示し、さらに分数の指数も導入した。例えばそれは、指数が $\frac{1}{2}$ の時に平方根となり、 $\frac{1}{3}$ の時には立方根となることも示したことに言及している。

ヴィエト (Vieta) はステヴィンよりも数年後の人であるが、その最大の功績は既知数や未知数を文字で表し、前者には子音、後者には母音を使用したことであるとし、また彼は負の指数を導入したことも述べている。

ジラルールは最初等号 (=) は減算の意味で使用していたことが述べられる。一方、等号は記号を使用せずに言葉による表現であり、それはハリオットの時代まで続いたとする。ハリオット (Harriot) はまた等号を現在の意味で使用したことの他に、不等号である $>$ や $<$ を使用したとも述べられている。

オートリッド (Oughtred) は、その著書の中で初めて乗算記号 \times を使用した。そして同じ目的のために時々乗算記号を省略し、文字を続けて書き表すこともなされたと言及する。

最後に以上の結果をまとめたものとして、 $x^3 - 6x^2 + 11x = 6$ について、次のように種々の表記法の例をあげている。これらの例からバベッジが記述しているとおり、ボンベリやステヴィンの指数表記やハリオットの等号、シュティーフェルにおける + や - の使用を確かめることができる ^{*14}

Pacioli	1 cu. m. 6ce. p. 11co. eguale 6
Stifelius	1 ss - 6 z + 11 z equantur 6
Bombelli	1 $\text{cu. m. 6}^{\text{cu. p.}}$ eguale 6
Stevinus	1 ③ - 6 ② + 11 ① egale 6
Vieta	1C - 6Q + 11N egal 6
Harriot	1. aaa - 6. aa + 11. a = 6
Modern	$x^3 - 6x^2 + 11x = 6$

^{*11} カジョリでは、Luca Pacioli と記述されている。F. Cajori, *op. cit.* (Chicago: Open Court Pub., 1928), p.106

^{*12} カジョリでは、Michael Stifel と記述されている。Cajori, *op. cit.*, p.139

^{*13} カジョリでは、Albert Girard と記述されている。Cajori, *op. cit.*, p.158

^{*14} 著作集での Pacioli の式の最後の部分は eguale 6 となっているが、事典での記述は eguale 6nⁱ となっている。これは事典の記述の方が正しい。

また、ニュートンとライプニッツ表記法をめぐる論争についての記述がなされ、バベッジはそれぞれの後継者たちが問題点の所在がわかっていないと述べた後、数理科学の現在の状況から判断すると、ライプニッツの表記法が過去に提案された表記法のうち最良のものと結論づけている。

2. 2. 2 バベッジのルール

表記法の歴史を述べた後、バベッジは表記法に関してのルールを述べている^{*15}。以下その 11 のルールについて詳しく述べていくことにする。

(1) すべての表記法は、指示された演算の本質が受け入れられるのと同様に単純でなければならない。

バベッジはこのことは十分に明らかであると述べた後、複雑な演算の手順を表現することは不可能であるが、それらの表現の組み合わせにより単純化できるであろうとしている。

(2) 私たちは、一つの事柄について一つの記号を割り当てるということを堅守しなければならない。

ここでは同じ記号を別の意味で使用することによって生じる混乱について述べている。バベッジはその例としてラグランジュやルジャンドルの記号の用法を掲げている。ラグランジュについては、大陸においては記号法が工夫されているにもかかわらず、その著作において流率法の記号を使用しているとし、ルジャンドルは $=$ という記号を通常の意味である等号と剰余が等しいという意味の 2 つの意味に使用していることを指摘している。そして異なる記号が同じ意味で使われていることの混乱についても指摘し、次のような例を示している。

ルジャンドル: $a^n = -1$ ガウス: $a^n \equiv -1 \pmod{p}$ パーロウ: $a^n \simeq p-1$

(3) 既に考案されている別の記号と類似する新たな関係を表すことが必要となった時には、できるだけ便利のように既に考案されている記号と密接に結びつけるようにしなければならない。

これについてバベッジは、以下のように説明している。例えば既知数や未知数を考えてみると、既知数はアルファベットの最初の方の文字で、未知数はアルファベットの最後の方の文字を使って表す方法が長く使われてきたと述べ、16~17 世紀には既知数を子音で、未知数を母音で表す方法も使用されたと紹介する。これらの関係により、前者の用法と同様に既知関数は $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ で、未知関数は φ, χ, ψ と記述しなければならないと提案した。別な例として、 xx を x^2 と記述するように、演算の繰り返しである $\psi\psi$ を ψ^2 と記述しなければならないとバベッジは主張している。

(4) 私たちは必要性なしに数学の記号を増やしてはならない。

科学においては既に知られている関係や組み合わせから、新しいそれへと発展させようとするのが一般的である。もし簡潔性のみの理由で、新しい記号が用いられるのであるなら、それはできるだけ避けねばならない。具体的な例として似かよった意味を持つ 3 つの記号を例にして、このルールについて詳述している。

ヴァンデルモンド (Vandermonde) は $x \cdot x - a \cdot \dots \cdot x - n-1a$ を $[x, a]$ と表記し、 $a = 1$ の場合を $[x]^n$

^{*15} 以下の事項に付された番号は、ダビーが便宜上付したものである。バベッジの論文ではそれらをイタリック体にするにより注意を喚起している。

と表した。一方、クランプ (Kramp) はその論文の中で、 $x^{n1a} = x \cdot x + a \cdot \cdots \cdot x + \overline{n-1}a$ とし^{*16}、またアルボガスト (Arbogast) は、 $D^n 1^x = x \cdot x - 1 \cdot \cdots \cdot x - \overline{n-1}$ のような式を導入した。

これらの式は明らかに階乗を求める式の一部を表している。 $x \cdot x \cdot \cdots$ を x^n で表すとする、 n は繰り返しの意味であり、 x を n 回繰り返すと x^n になるという意味である。この考え方からすると、上に述べた式のうち、ヴァンデルモンドとアルボガストの式で n については繰り返しの意味するという点でルールに合っているが、 a は階差であるので繰り返しにはなじまず、ルールには合っていないとバベッジは主張する^{*17}。また、先程のヴァンデルモンドの式は第2階差がゼロの場合であるが、第3階差がゼロの場合として下記のような式を掲げている^{*18}。

$$[x.a, b]^n = x \cdot \overline{x+a} \cdot \overline{x+2a+b} \cdot \cdots \cdot \overline{x+na + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot b}{2}}$$

この方法で説明すると、クランプの式は次のようになる^{*19}。

$$x^{n1a,b} = x \cdot \overline{x-a} \cdot \overline{x-2a-b} \cdot \cdots \cdot \overline{x-na - \frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}b}$$

バベッジはまた、ルジャンドルは階乗を別の記号である $\gamma(x)$ で表していることも述べている。

(5) どのような逆の演算を示そうとした時はいつでも、指数に -1 を持った同じ記号を用いなければならない。

例として、 δ の逆関数は、 δ^{-1} で表すことを示した後、三角関数の逆関数の表現についてを論点としている。 $x = \tan y$ の逆関数は、普通 $y = \arctan x$ と表すが、これは単語としては長くエレガントではないとバベッジは述べ、 $y = \tan^{-1} x$ と表すべきであると主張する。

(6) 等式は、規則を示すことができるものでなければならない。

記号は任意に使用してはならず、重大な必要性がないと新しい記号を導入してはならない。どうしても新しい記号を導入しなければならない場合は、将来誰かが変えようとする誘惑を斥けるほど強い力と性質を持っていなければならないとする。そして、長い経験が記号を自然に一致させ、最も正しい型としていくとバベッジは述べる。

^{*16} ここに記したのは著作集での数式であり、事典での記述は左辺が x^{n1a} となっている。指数が $n1a$ では a の階差がわからないので、編者は 1 を 1 に変えたものと考えられる。

^{*17} このアルボガストの式というのは誤りで、正しくはクランプの式についての記述である。というのは、アルボガストの式には階差にあたる a が無いからである。また、ヴァンデルモンドとアルボガストの式について述べたその後に、「アルボガストの方法には、不便さは少なくとも同等にある。」とバベッジは述べ、先程の2式と比較している。ところが、既にアルボガストの式については言及されているため、この記述は矛盾することになる。このことから、前述のことは確かめることができる。

^{*18} 著作集と事典の式はどちらも同じであるが、この式は $[x.a, b]^n = x \cdot \overline{x-a} \cdot \overline{x-2a-b} \cdot \cdots \cdot \overline{x-na - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot b}{2}}$ とするのが正しいと考える。

^{*19} 先程のヴァンデルモンドの場合と同様、正しい式は

$$x^{n1a,b} = x \cdot \overline{x+a} \cdot \overline{x+2a+b} \cdot \cdots \cdot \overline{x+na + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}b}$$

となると考える。以上2つの式を見比べてみると、ヴァンデルモンドとクランプの2つの式は右辺が入れ替わって印刷されているのではないかと考えられる。

- (7) 演算を n 回繰り返すという表現で構成するよりも、 n の明らかな関数として表現とする方が好ましい。

バベッジは、次のような例により説明を行っている。

$$y = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + n \text{ 項まで}$$

という級数において n 項目の表示については、文字では書かずに次のように記述する。

$$y = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

別な例として次のような場合が考えられる。

$$y = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

は次式のように記述することができる。

$$\int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \cdots (n) \int \frac{dx}{1-x} \quad \left[\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \right]$$

しかしここで、 n は $\int \frac{dx}{x}$ を n 回繰り返すことなのか、積分の数が n 個なのか曖昧である。従って、次のように書かかれるべきである。

$$\left(\int \frac{1}{x} \right)^n \frac{x}{1-x} dx^n$$

もしくは

$$\left(d^{-1} \frac{1}{x} \right)^n \frac{x}{1-x} dx^n$$

- (8) すべての記号法は、単独で使われることができるような役割を持つほどに工夫されなければならない。

記号の使用法は発展しており、当初の意味から別の意味が付け加わった場合もあり、注意しておかなければならないとする。記号を考案していく中で、結果的にそれらが法則を表現することができるものではないとバベッジは主張する。

- (9) 量を示すすべての文字はイタリックで印刷されなければならない。しかし、演算を示すすべての文字はローマン体で印刷しなければならない。

解析学においては、記号には量を示すものと、演算を示すものと2つの区があるとバベッジは主張している。例えば、 $a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ においては d は係数であるが、別の意味で前に置くことにより演算を示す記号となることができる。しかし、量の記号なのか演算の記号なのかわからないという不便さがある。この問題を避けるために、ラクローアはローマン体の d を微分の演算記号とし、イタリック体の d を量の記号として区別している。また、アルボガストもその著書の中で、同じ目的でローマン体の d を使用している。そして、完全にこの問題を解決するためにこのルールを設けるのもであるとバベッジは提案する。

このように、 $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \dots, \psi, \theta$ は量を表す文字とし、 d, f, A, B, C は演算を表す文字とする。これの唯一の不便さは、さほど大きなものではないが、少数のギリシャ文字の新しい型を作成することが必要であるということである。というのは、これら2つの印刷書体がないからである。

そしてさらに、演算を表す文字は2つの種類に分類できるとする。それは次のように説明される。一つは、 $f, F, \varphi, \psi, \chi$ という関数を表す文字で、何らかの変化が起こるものを意味する。ここで注意しておかなければならないことは、 $f(1+x^2)$ は $(1+x^2)$ の関数であるが、 f は $(1+x^2)$ とは独立しているということである。

一方、 $d(1+x^2)$ は、 $(1+x^2)$ と関連していることに注意する必要がある。そしてそれは、括弧の中に入っている関数の形に依存する。このような文字として、 $d, \int, \Delta, \Sigma, S, \delta$ がある。

以上述べてきたような文字のうち、バベッジは前者を「関数的特性記号」(*functional characteristic*) と呼び、後者を「派生的特性記号」(*derivative characteristic*) と呼ぶことを提案している。

(10) それぞれの「関数的特性記号」は、まるでそれらが1つの文字を構成するかのように、それに続くすべての記号に作用する。

例えば、 $\alpha x = ax + bx^2$ と $fx = 1 - x^2$ とするなら、

$$\alpha fx = \alpha(1 - x^2) = a(1 - x^2) + b(1 - x^2)^2$$

となるが、順序を入れ替えると

$$f\alpha x = 1 - (\alpha x)^2 = 1 - (ax + bx^2)^2$$

となる。

また、乗算記号 (\times) やドット (\cdot) の使い方にも注意を喚起している。それらは2つの文字の間に単に並記することで使用されているが、もし2つの文字がイタリック体で書かれているなら (すなわち量を表す文字であるなら)、次のように簡単に書けるとしている。

$$abc, \quad x^2y, \quad \frac{a+x}{y}a^2$$

さらに、 \times や \cdot は分離的な乗算を意味し、前に「派生的特性記号」が置かれている2つの文字の間にそれらが挿入されるなら、最初の文字のみに作用するということに注意すべきであるとバベッジは指摘する。すなわち、

$$\Delta \frac{x+a}{x} \cdot \frac{\epsilon^x - 1}{x}$$

は次の表現と同一のものである。

$$\frac{\epsilon^x - 1}{x} \Delta \frac{x+a}{x}$$

しかし、ドット (\cdot) や乗算記号 (\times) がなければ、先程の式は次式的全微分を意味することとなる。

$$\frac{x+a}{x^2} (\epsilon^x - 1)$$

もう一つの例がバベッジにより提示される。

$$d.xv.\frac{du}{dx}$$

は、 u の x に関連しての偏微分に、 xv の全微分を乗じたものと考えられる。しかし、次のような表現では異なったものとなる。

$$d.xv\frac{du}{dx}$$

は $xv\frac{du}{dx}$ の全微分と解釈できる。

微分においては、 $(dx)^2, (dx)^3, \dots (dx)^n$ のように多階の微分を表現することが必要となってくる。一方べき関数の微分として、 $d(x^2), d(x^3), \dots d(x^n)$ と表現する必要も生じる。これらは括弧の中が異なるだけではあるが、括弧は省略する方が望ましい。それは既に広く認められていて、前者を $dx^2, dx^3, \dots dx^n$ と表現することができる。混乱を避けるために、 x^2 等の微分は、 $d.x^2, d.x^3, \dots d.x^n$ とドットを挿入して表現することをバベッジは主張する^{*20}。

(11) 曖昧にならなければ、括弧は省略してもよい。

ここでバベッジは $\sin \theta$ を用いた例により、このルールを説明する。まず下記のような5つの例が示され、これら一つ一つに対してバベッジは意見を述べていく。

$$(\sin.\theta)^2, \quad \sin.\theta^2, \quad \sin.^2\theta, \quad (\sin\theta)^2, \quad \sin\theta^2$$

バベッジは最初の例においては、ドットは取ってしまっても特に問題はないとし、ドットがある方がかえって別の原則からもじやまになると述べている。第2の例は、第1の例の括弧を取り除いたものである。また、ルールに従ってドットは必要ではないことをあわせて述べている。第3の例は、最も異議があるものである。指数は繰り返しを示すもので、この例は定義が非常に曖昧になるものとして、 $\sin.\sin.\theta$ もしくは角度 θ の \sin の \sin となるような2つの場合が考えられるとしている。すなわち前者は $\sin\theta$ の平方になるのに対し、後者は \sin とは別の関数になってしまうということである。もし $\sin.^2\theta$ が許されるのであれば、第2の場合の $\sin\theta$ はどのように書けばよいのかと述べ、通常ルールを破ることとなると言及する。そして一つの違反は他の違反を導くであろうことも警告している。第4の例は、アルボガストが用いているものである。そして、これを最良の例としている。最後の例は、第4の例の括弧を除いたものであるが、 θ が合成された量であるなら、括弧が必要であるとしている。これはラクローアやガウス、ドランプルも使用しているとの言及もある。

また、バベッジは数式における括弧の例を次のように示している。

$$\left[1 - \left(\tan \frac{a}{y}\right)^2\right]^2 + \left\{1 - \left\{\tan \frac{y}{a}\right\}^2\right\}^2$$

^{*20} ここで注意しておくべき点は、ドット(・)の位置の問題である。著作集の注でも述べられているようにバベッジの使用するドットは下の方に置かれており、これは省略符号としてのピリオドや小数点と混乱を生じることになる。その混乱を防ぐために著作集ではドットを真ん中に置くように訂正したとされているが、この箇所では下の方に置かれたままである。理由は不明であるが、著作集のこれ以降の箇所ではドットの位置は下の方に置かれている。

$$\left(1 - \left[\tan \frac{a}{y}\right]^2\right)^2 + \left[1 - \left\{\tan \frac{y}{a}\right\}^2\right]^2$$

$$\left\{1 - \left(\tan \frac{a}{y}\right)^2\right\}^2 + \left\{1 - \left(\tan \frac{y}{a}\right)^2\right\}^2$$

バベッジはこの3種類の中では、最後のものが最良であるとする。それは明確性が不完全であるというものではなく、他の2式は対称性が欠けていることが理由である。

最後にバベッジは大陸の記号法と流率法による記号法とを比較し、流率法によるものの欠点として以下の3点を掲げ、明らかに大陸の記号法が理にかなっていることを強調している。

1. 指数が関係する文字から生じる不正確さと、1つの文字に2つの指数があることから生じる混乱があること
2. Δ や δ のような確立されている表記法との類似性がないこと
3. 不可能と言っては言い過ぎだが、流率法によって演算を量から分離することに関する定理を表現することの大きな困難性があること

まとめ

以上見てきたように、バベッジは表記法にも一定のルールを持たせることを主張した。しかし、例えば \arctan の表記を認めず \tan^{-1} のみを認めるというように、既に定着しているものを認めないというものも見受けられる。

また、バベッジのルールの考え方から見ると、従来の表記法の考え方を重視していることがわかる。それは“Notation”の中で再三再四述べられているように、表記法の歴史は改良の歴史であると言うことである。しかしそれ以上にバベッジが主張する表記法は、機能性重視の傾向が見受けられる。そしてその結果バベッジの主張は、 \arctan の例を含めて、量をイタリック体で演算をローマン体で表すことに基準を求めること等、機能性を重視するあまり現実を無視した傾向が見られる。

しかし全体的な内容については妥当な点が多い。特にバベッジが示したルールの3、5及び11の一貫した使用は今日使用されている記号を改良するであろうし、全く必要のない曖昧さを除去するであろうと評価されている^{*21}。

むすび

バベッジは大学時代に D-ism を標榜する解析協会設立の中心人物であったことから、表記法については非常に関心があったと言える。“Notation”の執筆は1822年のことだが、これ以降バベッジは数学に対して興味を失っていくように見受けられるが、それは階差エンジンの設計製作に集中したためであると考えられる。

本論文では述べなかったが、バベッジには Mechanical Notation についての論文もあり^{*22}、数学ばかりではなく機械作動の表記法にも関心があった。

バベッジの主張の中で特に重視すべき点は、最後に述べられる「演算を量から分離することに関する定理」(theorems relating to the separation of operations from quantities) という表現である。これは、演算を量

^{*21} Dubbey, *op. cit.*, p.171

^{*22} Ch. Babbage, *Laws of Mechanical Notation* (London: Privately Printed, 1851)

との関係から切り離して演算そのものの性質について考えると言う「解析エンジンのスケッチ^{*23}」に繋がっていくと考えられる。この考えにより解析エンジンの機構が考えられ、そしてそれは現在のコンピュータへと発展していくのである。

最後になりましたが、記号法の歴史について適切な助言をいただきました三浦伸夫教授に深く感謝いたします。

文献

1. カッツ, V. J., 『数学の歴史』, 上野健爾・三浦伸夫監訳, 共立出版, 2005
2. Babbage, Ch., "Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 1, 1822, pp.63-76
3. Babbage, Ch., "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.2, 1827, pp.325-77
4. Babbage, Ch., "Notation", *Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, pp.394-9
5. Cajori, F., *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open CourtPub., 1928-9)
6. Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
7. Grattan-Guinness, I., "Charles Babbage as an Algorithmic Thinker", *IEEE Annals of the History of Computing*, Vol.14, No. 2, 1992, pp.34-48
8. King, A. A. "Sketch of the Analytical Engine", *Scientific Memoirs* Vol.3, 1843, pp.666-731

^{*23} A. A. King, "Sketch of the Analytical Engine", *Scientific Memoirs* Vol.3, 1843, pp.666-731 (著者名はキング (ラヴレーズ伯爵夫人) となっているが、執筆にあたってはバベッジが大きく関与している。)